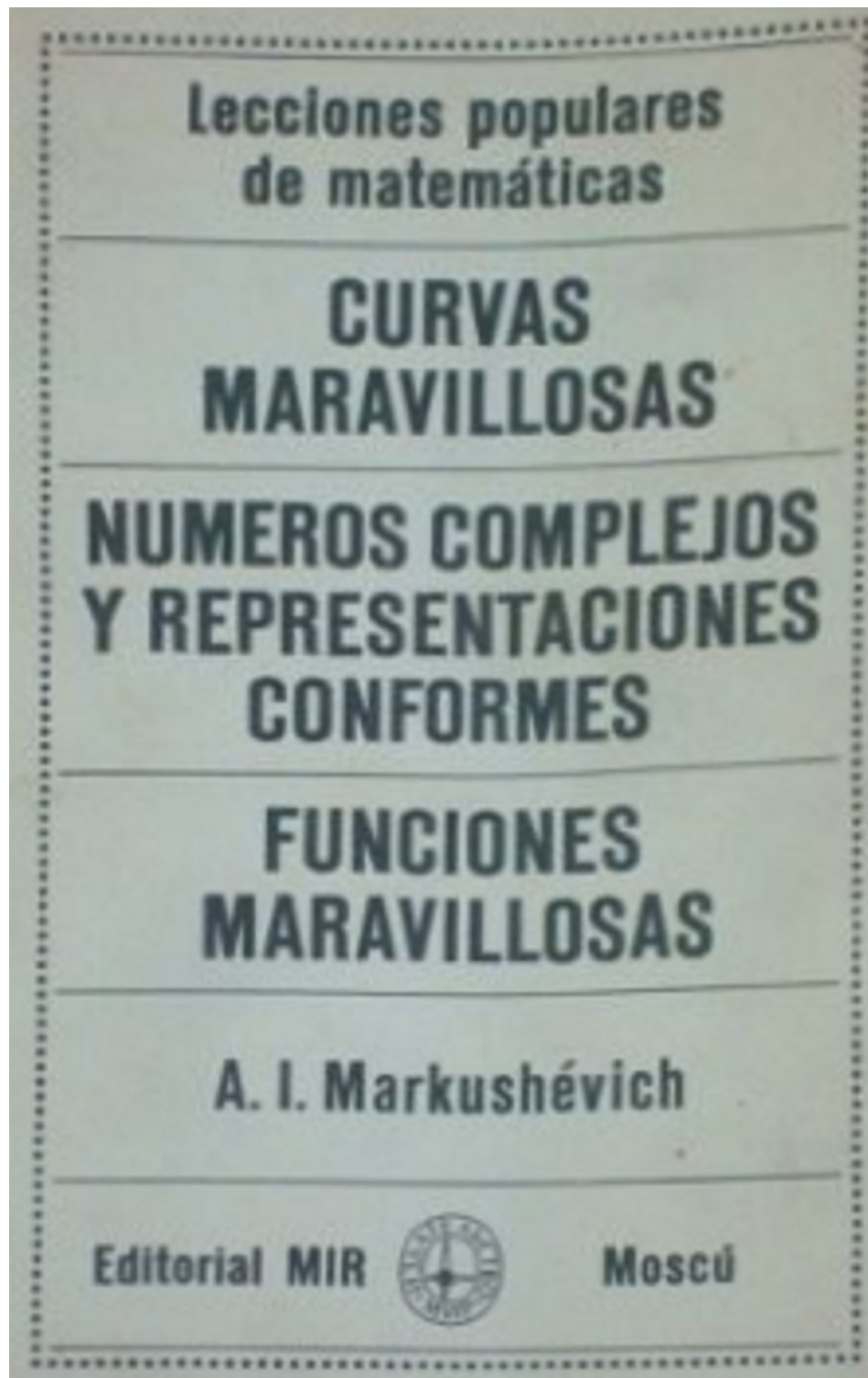




Curvas Maravillosas

A. I. Markushevich

Prólogo

Este libro está destinado principalmente para los escolares y para todos los que están interesados en ampliar sus conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela.

Se basa en una conferencia que dictó el autor a un grupo de alumnos moscovitas de séptimo y octavo grados.

Al preparar la publicación de la conferencia, el autor la ha ampliado un poco tratando de conservar el estilo accesible de la exposición.

El complemento más esencial es el punto 13 en el que se trata de la elipse, la hipérbola y la parábola en tanto que secciones de una superficie cónica.

Con el fin de no aumentar el volumen del libro, las propiedades de las curvas se dan, en su mayoría, sin demostración aun cuando en muchos casos la demostración podría ser realizada en forma accesible para el lector.

El autor

* * *

1. Las palabras «curva» o «curvo» se emplean a veces como adjetivos para describir lo que se aparta de la dirección recta.

Los matemáticos suelen emplear la palabra «curva» en calidad de sustantivo como un sinónimo de línea curva. ¿Qué es una línea curva? ¿Cómo abarcar en una definición las curvas que se trazan con lápiz o pluma en el papel o con tiza en la pizarra y las curvas que describen una estrella fugaz o un cohete en cielo nocturno? Aceptaremos la definición siguiente; la *curva* (o sea, la línea curva) es la *traza de un punto móvil*. En nuestros ejemplos, este punto es la punta del lápiz, el extremo de la tiza, un meteoro candente que atraviesa las capas superiores de la atmósfera o un cohete. Desde este punto de vista, la recta es un caso particular de la curva. Efectivamente, ¿acaso no puede ser rectilínea la traza de un punto móvil?

2. Un punto móvil efectivamente describe una recta si pasa de una posición a cualquier otra por el camino más corto. Para trazar la recta se utiliza la regla; si deslizamos un lápiz sobre su borde, la punta del lápiz dejará en el papel una traza rectilínea.

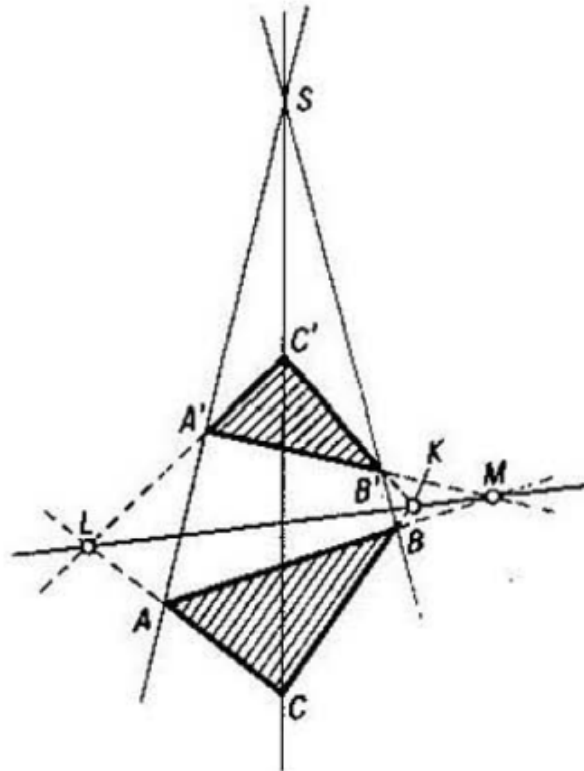


Figura 1

Si el punto se desplaza sobre un plano de forma que permanece constante su distancia a un punto fijo del mismo plano, describirá la circunferencia; basándose en esta propiedad de la circunferencia, se emplea para trazarla el compás.

La recta y la circunferencia son las curvas más sencillas y, a la vez, son las dos curvas más notables en cuanto a sus propiedades. La recta y la circunferencia son las curvas más familiares al lector. Pero que no piense que conoce a fondo todas las propiedades principales de las rectas y circunferencias.

¿Sabe, por ejemplo, que si los vértices de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se hallan sobre tres rectas que se cortan en un punto S (fig. 1), los tres puntos K y L de

intersección de los lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$ de los triángulos deben estar sobre una misma recta?

El lector conoce, por supuesto, que el punto M describe una recta si se desplaza sobre el plano de forma que permanecen iguales sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del mismo plano, o sea, si $MF_1 = MF_2$ (fig. 2).

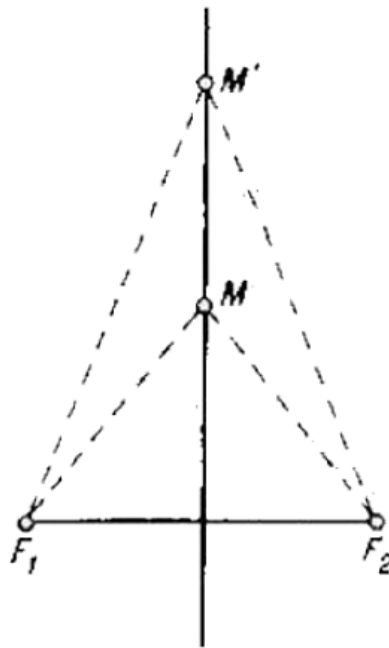


Figura 2

Pero, le será difícil, probablemente, explicar qué curva describirá el punto M si su distancia al punto F_1 será un número determinado de veces mayor (por ejemplo, dos veces como en la fig. 3) que su distancia al punto F_2 . Resulta que esta curva es la circunferencia.

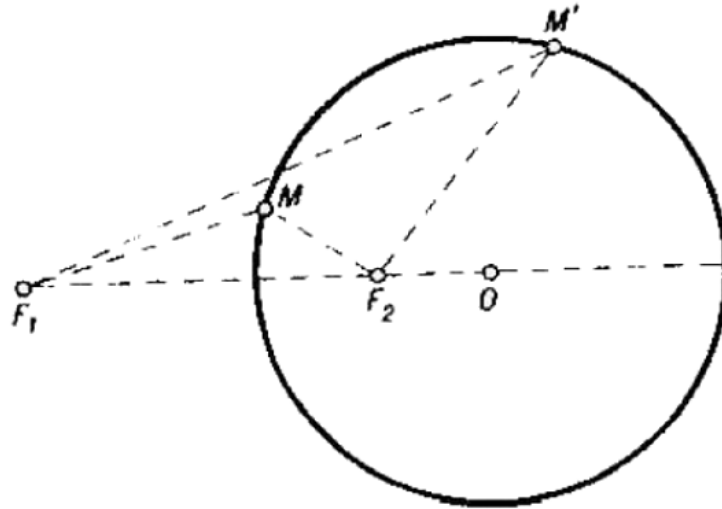


Figura 3

Por consiguiente, si el punto M se desplaza sobre el plano de modo que su distancia hasta uno de los dos puntos fijos F_1 y F_2 de éste es proporcional a su distancia hasta el otro punto:

$$MF_1 = k * MF_2$$

el punto M describe una recta (si el coeficiente de proporcionalidad k es igual a la unidad) o una circunferencia (si este coeficiente es distinto de la unidad).

3. Consideremos la curva que describe el punto M si permanece constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 . Tomemos un hilo, atemos sus extremos a dos alfileres clavándolos en una hoja de papel de modo que el hilo quede libre. Si ahora estiramos el hilo mediante un lápiz colocado verticalmente y, manteniendo el hilo tirante, comenzamos a desplazar el lápiz apretando levemente sobre el papel, su punta M (fig. 4) describirá una curva ovalada (semejante a un círculo achatado) que se denomina *elipse*.

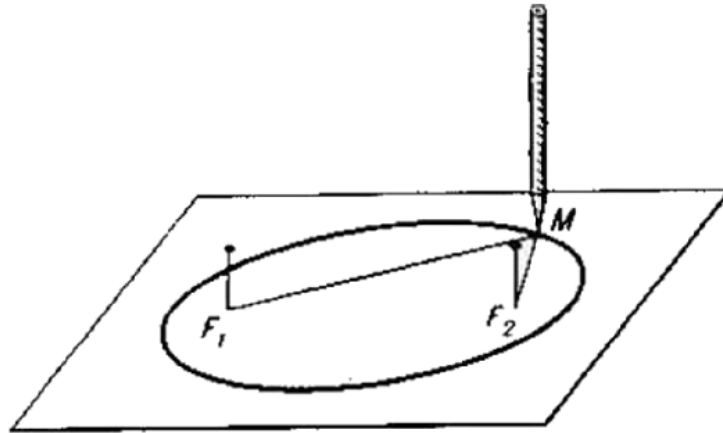


Figura 4

Para obtener la elipse completa una vez trazada la mitad de la misma, habrá que pasar el hilo al otro lado respecto a los alfileres. Es evidente que la suma de las distancias de la punta M del lápiz a las puntadas F_1 y F_2 permanece constante durante todo el tiempo: esta suma es igual a la longitud del hilo.

Las puntadas marcan en el papel dos puntos que se denominan focos de la elipse. Esto se justifica por la siguiente propiedad notable de la elipse.

Si encorvamos una franja estrecha metálica bien pulida dándole la forma de la elipse y colocamos, en uno de los focos una fuente de luz, sus rayos, después de reflejarse en la franja, se reunirán en el otro foco; por consiguiente, en este último también se verá una fuente de luz, imagen de la primera (fig. 5).

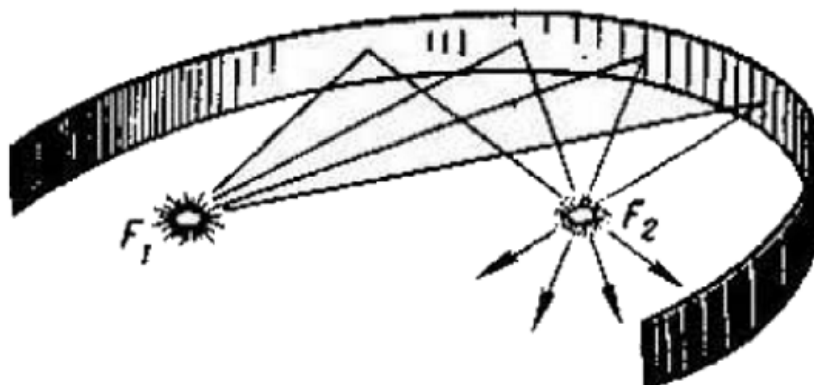


Figura 5

4. Si unimos los focos de la elipse mediante un segmento rectilíneo y después lo prolongamos hasta cortar la elipse, obtendremos el eje mayor A_1A_2 (fig. 6) de la misma.

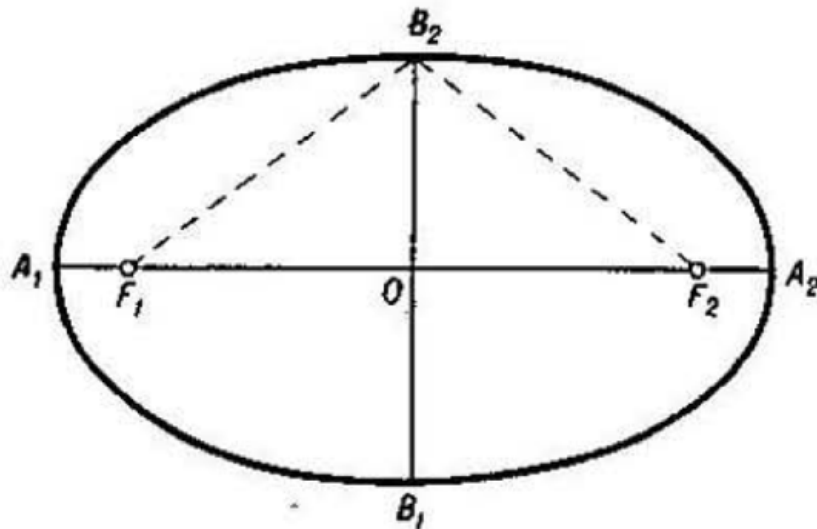


Figura 6

La elipse es una figura simétrica respecto a su eje mayor. Si dividimos por la mitad el segmento F_1F_2 y en su punto medio levantamos una perpendicular, prolongándola hasta cortar la elipse, obtendremos el eje menor B_1B_2 de la elipse. También es un eje de simetría de la elipse. Los extremos de los ejes, o sea, los puntos A_1 , A_2 , B_1 y B_2 , se denominan *vértices* de la elipse.

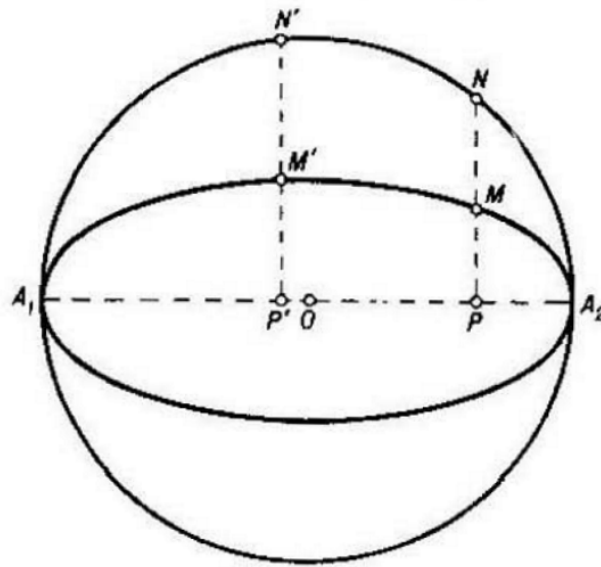


Figura 7

La suma de las distancias del punto A_1 a los focos F_1 y F_2 debe ser igual a la longitud del hilo:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = l$$

Pero

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

debido a la simetría de la elipse; por eso, podemos tomar A_2F_2 en lugar de A_1F_1 y así encontramos que

$$A_2F_2 + A_1F_2 = l$$

Es obvio que en el primer miembro de esta igualdad figura la longitud del eje mayor de la elipse. Es decir, la longitud del eje mayor de la elipse es igual a la longitud del hilo o, en otras palabras, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es igual al eje mayor de esta elipse. Debido a la simetría de la elipse, de aquí resulta que la distancia entre el vértice B_2 (o B_1) y cualquiera de los focos es igual a la mitad de la longitud del eje mayor. Por eso, dados los vértices de la elipse, es fácil encontrar sus focos: hay que determinar los puntos de intersección

del eje mayor y del arco de la circunferencia cuyo centro es el punto B_2 y cuyo radio es igual a la mitad de A_1A_2 .

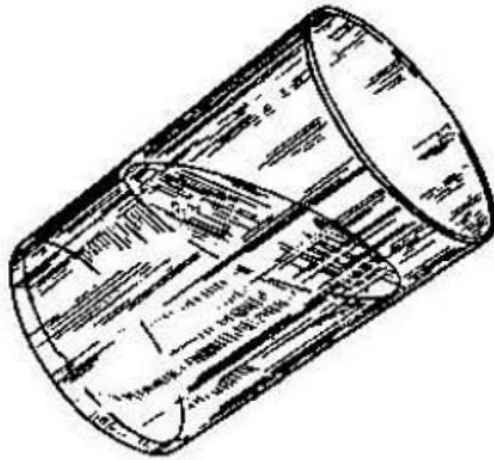
5. Consideremos la circunferencia que tiene como diámetro el eje mayor de la elipse (fig. 7).

Desde un punto cualquiera N de la circunferencia bajemos sobre el eje mayor la perpendicular NP que cortará la elipse en un punto M . Es obvio que NP será un número determinado de veces mayor que MP . Si tomamos otro punto cualquiera N' de la circunferencia y realizamos esta misma construcción, resultará que $N'P'$ será mayor que $M'P'$ el mismo número de veces:

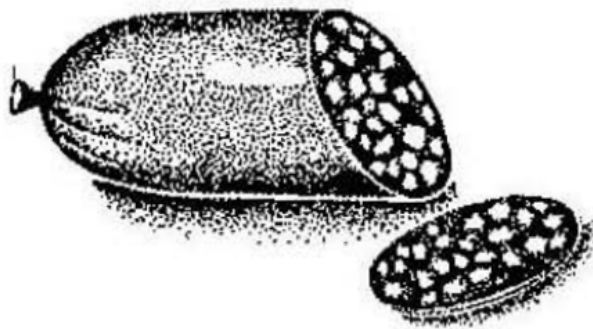
$$NP / MP = N'P' / M'P'$$

En otras palabras, la elipse se puede obtener a partir de su circunferencia circunscrita: hay que acercar todos los puntos de la circunferencia al eje mayor de la elipse reduciendo un mismo número de veces sus distancias a este eje. Dicha propiedad ofrece un método sencillo para la construcción de la elipse: trazamos una circunferencia, tomamos un diámetro cualquiera de la misma y, a partir de los puntos de la circunferencia, construimos otros que se hallan en las perpendiculares al diámetro y que se encuentran más cerca de él en un número determinado (1.5, 2, 3, etc.) de veces. Así obtendremos puntos de la elipse cuyo eje mayor coincide con el diámetro de la circunferencia y cuyo eje menor es un número correspondiente (1.5, 2, 3, etc.) de veces menor que el diámetro.

6. En la vida frecuentemente tropezamos con elipses. Por ejemplo, si inclinamos un vaso de agua, la capa superior tendrá la configuración de la elipse (fig. 8);

*Figura 8*

de la misma forma, si cortamos un pedazo cilíndrico de salchichón inclinando el cuchillo, obtendremos rodajas en forma de elipse (fig. 9).

*Figura 9*

En general, si un cilindro (o un cono) recto se corta mediante un plano inclinado (de modo que el plano no corte las bases), obtendremos como sección una elipse (fig. 10).

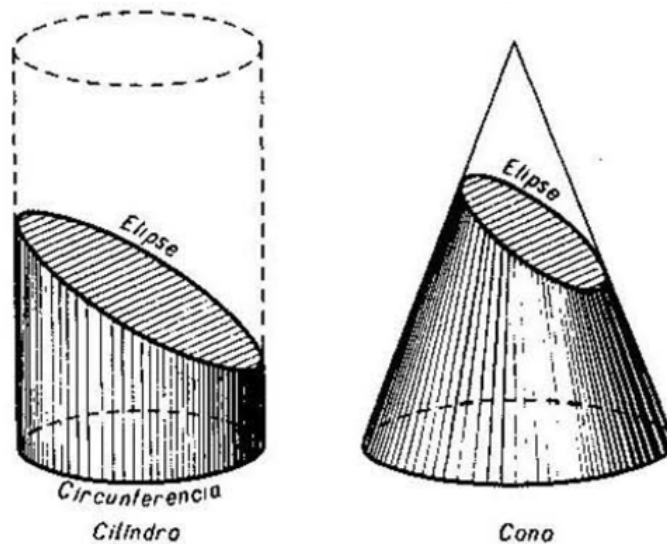


Figura 10

Fue Kepler (1571 - 1630) quien encontró que los planetas se mueven alrededor del Sol según unas elipses, y no círculos como se pensaba anteriormente, con la particularidad de que el Sol se halla en uno de los focos de cada elipse (fig. 11).

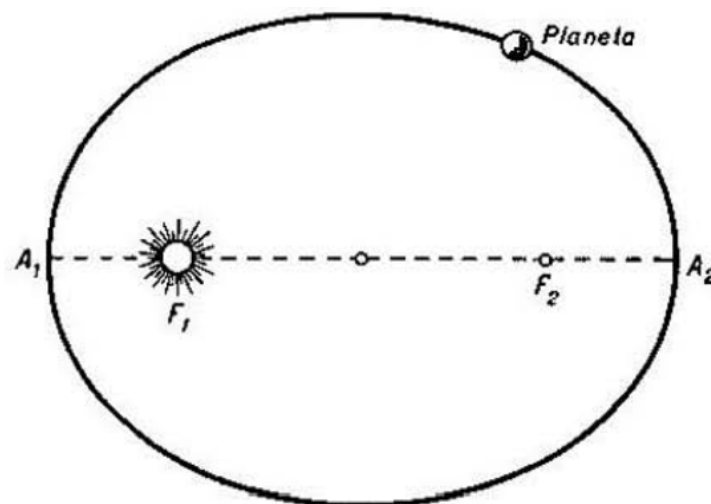


Figura 11

Durante una revolución, todo planeta pasa una vez por el vértice A_1 de la elipse más próximo al Sol, que se denomina *perihelio* y una vez por el vértice A_2 , más alejado del Sol que se denomina *afelio*. Por ejemplo, la Tierra se encuentra en el perihelio cuando en el hemisferio boreal es invierno y en el afelio, cuando es verano.

La Tierra en su movimiento describe una elipse poco aplastada que, por su forma, se asemeja a la circunferencia.

7. En una hoja de papel tracemos una recta cualquiera D_1D_2 , tomemos un punto F fuera de la misma y hagamos que la punta M del lápiz se desplace de modo que en todo momento sean iguales sus distancias a la recta y al punto F (fig. 12).

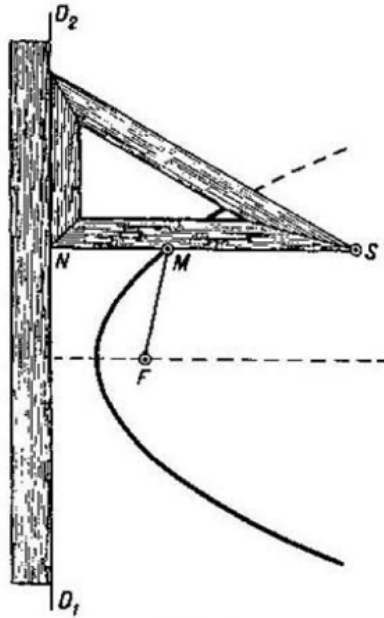


Figura 12

Con este fin bastará sujetar, mediante una chinche, al vértice S de la escuadra un hilo de longitud igual al cateto SN y atar el extremo libre del hilo a un alfiler clavado en el punto F . Si hacemos ahora deslizar el otro cateto de la escuadra sobre una regla aplicada a D_1D_2 , la punta M del lápiz, que estira el hilo y lo aprieta contra el cateto libre de la escuadra, estará a una misma distancia de la regla y del alfiler:

$$NM = MF.$$

La punta describirá en el papel una parte de la línea llamada *parábola*. Para obtener una porción mayor de esta curva, habrá que tomar una escuadra de cateto mayor y, en caso de necesidad, una regla más larga. La parábola consta de una rama que se extiende indefinidamente.

El punto F se denomina *foco* de la parábola; la perpendicular bajada desde el foco sobre la recta D_1D_2 (llamada *directriz*) y prolongada constituye el eje de simetría de la parábola y se denomina simplemente *eje* de la misma.

8. Si encorvamos una franja estrecha metálica bien pulida, dándole la forma de un arco de parábola, los rayos de una fuente de luz colocada en el foco, después de reflejarse en la franja, irán paralelamente al eje (fig. 13).

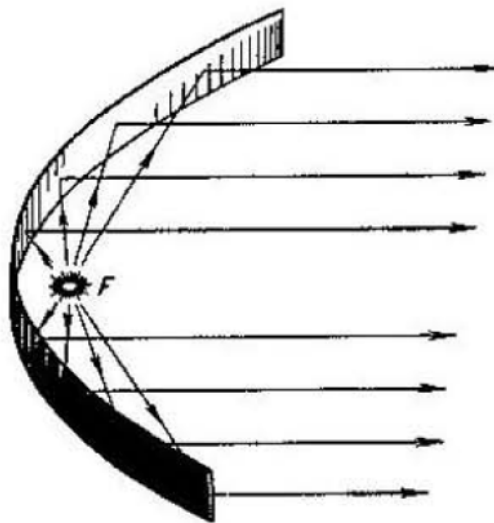


Figura 13

Recíprocamente, si un haz de rayos paralelos al eje de la parábola incide sobre nuestra franja, los rayos se reunirán, después de reflejarse, en su foco.

En esta propiedad de la parábola se basa el empleo de los espejos parabólicos en los faros de automóviles (fig. 14) y, en general, en los reflectores.



Figura 14

En lugar de franjas en el proceso de rectificación de estos espejos se emplean los así llamados *paraboloides de revolución*. Estas superficies se pueden obtener haciendo girar la parábola alrededor de su eje.

9. Una piedra, lanzada no verticalmente, describe una parábola (fig. 15); lo mismo se puede decir de *un* proyectil. Es verdad, *que* tanto en un caso como en el otro la resistencia del aire influye en la forma de la parábola y, de hecho, se obtiene otra curva. Pero, en el vacío, resultaría una parábola exacta.

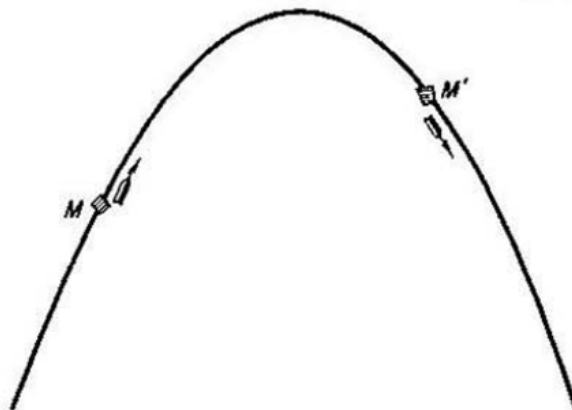


Figura 15

Si mantenemos constante la velocidad v con la que el proyectil sale del tubo del cañón y variamos el ángulo de inclinación del tubo con respecto al horizonte, el proyectil describirá distintas parábolas y tendrá diferentes distancias de vuelo. La distancia máxima corresponde al ángulo de inclinación de 45° y es igual v^2/g , donde g es la aceleración de la gravedad. Si disparamos verticalmente, el proyectil alcanzará una altura dos veces menor: $v^2/2g$

Cualquiera que sea la posición que demos al tubo (manteniéndolo en un mismo plano vertical), para cada velocidad de salida del proyectil siempre quedarán lugares en la tierra y en el aire a donde no podrá llegar el proyectil. Resulta que estos lugares y los lugares a donde puede llegar el proyectil si se apunta adecuadamente, quedan separados también por una parábola que se denomina *parábola de seguridad* (fig. 16).

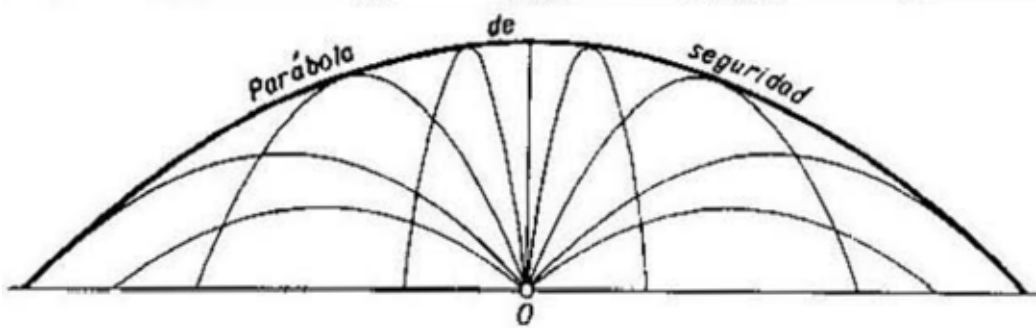


Figura 16

10. Por analogía con la elipse, podemos considerar las curvas que describe el punto M , si permanece constante la diferencia, y no la suma de sus distancias a dos puntos determinados F_1 y F_2 o bien el producto o, finalmente, el cociente de estas distancias (en el último caso se obtiene la circunferencia).

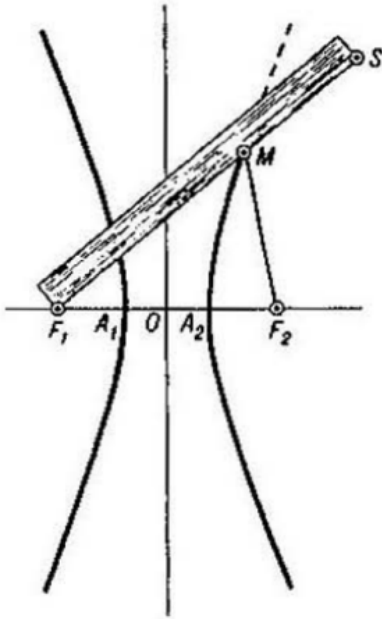


Figura 17

Consideremos el caso de la diferencia. Para garantizar el movimiento necesario del lápiz, clavemos dos alfileres en los puntos F_1 y F_2 y fijemos una regla en uno de ellos de modo que esta pueda girar sobre el papel alrededor del alfiler (fig. 17).

Tomemos un hilo (más corto que la regla) y fijemos uno de sus cabos al extremo S de la regla y el otro, al alfiler F_2 . Estiremos ahora el hilo apretándolo contra la regla mediante la punta M del lápiz.

Entonces la diferencia entre las distancias MF_1 y MF_2 será igual a

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS),$$

o sea, será igual a la diferencia entre las longitudes de la regla y del hilo. Si giramos la regla alrededor de F_1 apretando contra ella el lápiz y manteniendo tirante el hilo, el lápiz describirá sobre el papel una curva tal que la diferencia de distancias de cualquiera de sus puntos a F_1 y F_2 será siempre la misma e igual a la diferencia m entre las longitudes de la regla y del hilo. De esta forma obtendremos solamente la parte superior de la curva que aparece en la fig. 17 a la derecha. Para obtener la mitad inferior habrá que colocar la regla de modo que aparezca por debajo, y no por encima, de los alfileres. Por último, si fijamos la regla al alfiler F_2 y el extremo del hilo, al alfiler F_1 , obtendremos la parte de la curva que aparece en esta misma

figura a la izquierda. Ambas curvas construidas se consideran como una sola que se denomina *hipérbola*. Claro está que la hipérbola no se limita a los arcos construidos. Si tomamos una regla de longitud mayor y, a la vez, alargamos el hilo (pero conservando la diferencia entre sus longitudes), podremos prolongar indefinidamente nuestra hipérbola de la misma forma que, por ejemplo, el segmento de una recta.

11. Tracemos la recta que pasa por los focos de la hipérbola. Es un eje de simetría de la misma. El otro eje de simetría es perpendicular al primero y pasa por el punto medio del segmento F_1F_2 . El punto O de intersección de los ejes es el centro de simetría y se denomina simplemente *centro* de la hipérbola. El primer eje corta la hipérbola en dos puntos A_1 y A_2 llamados *vértices*; el eje A_1A_2 se denomina *eje real* de la hipérbola.

La diferencia entre las distancias del punto A_1 de la hipérbola a los focos F_1 y F_2 debe ser igual a m :

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m$$

Pero

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

debido a la simetría de la hipérbola; por eso, podemos tomar A_2F_2 en lugar de A_1F_1 y así encontramos que

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m$$

Es obvio que la diferencia $A_1F_2 - A_2F_2$ es igual a A_1A_2 , o sea, es igual a la longitud del eje real de la hipérbola. Es decir, la diferencia m entre las distancias de cualquier punto de la hipérbola a sus focos (con la particularidad de que la distancia menor se resta de la mayor) es igual a la longitud del eje real de la hipérbola.

Partiendo del vértice A_1 (o A_2) como centro busquemos la intersección del segundo eje de simetría de la hipérbola con el arco de circunferencia cuyo radio es igual a la mitad de F_1F_2 . Encontraremos dos puntos B_1 y B_2 (fig. 18); el segmento B_1B_2 se denomina *eje imaginario* de la hipérbola. Construimos ahora el rectángulo $PQRS$

cuyos lados son paralelos a los ejes de la hipérbola y pasan por los puntos A_1 , A_2 , B_1 y B_2 y tracemos sus diagonales PR y QS . Prolongándolas indefinidamente, obtendremos dos rectas que se denominan *asíntotas* de la hipérbola.

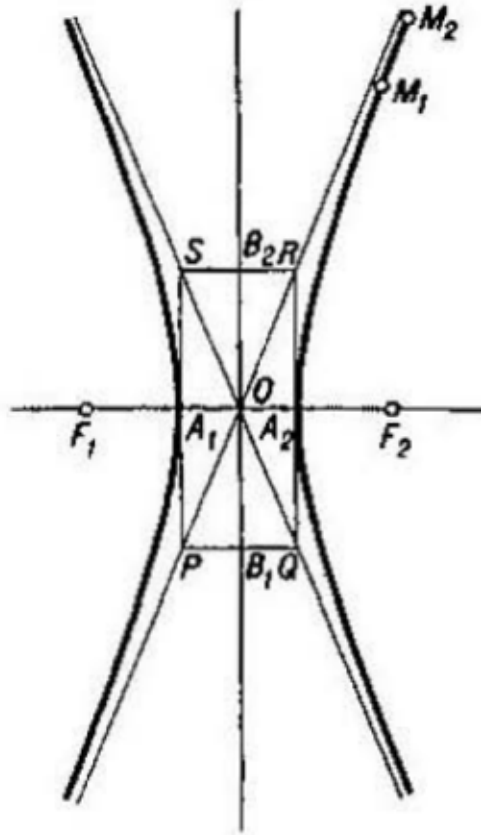


Figura 18

Tienen la siguiente propiedad notable: jamás se cortan con la hipérbola aunque a medida que los puntos de la hipérbola se alejan de su centro, se aproximan más y más a las asíntotas situándose tan cerca de ellas como se quiera. Los arcos de hipérbola comprendidos entre dos puntos alejados del centro parecen en el dibujo segmentos de recta (véase el arco M_1M_2 de la fig. 18) aunque nunca son rectilíneos; simplemente tienen una encorvadura insignificante que escapa a la vista.

Para trazar aproximadamente la hipérbola sin recurrir a la regla y al hilo (que permiten la construcción exacta), se procede del modo siguiente. Se trazan primero los ejes de simetría de la hipérbola y se toman en el primero los focos F_1 y F_2 a igual distancia del centro; después sobre este mismo eje se construyen a ambos lados del

centro segmentos iguales a la mitad de m , o sea, a la mitad de la diferencia dada entre las distancias de los puntos de la hipérbola a sus focos, obteniendo los vértices A_1 y A_2 de la hipérbola: a continuación determinamos en el segundo eje la puntos B_1 y B_2 , construimos el rectángulo $PQRS$ y, por último, trazamos y prolongamos sus diagonales. Así obtendremos el dibujo representado en la fig. 19.

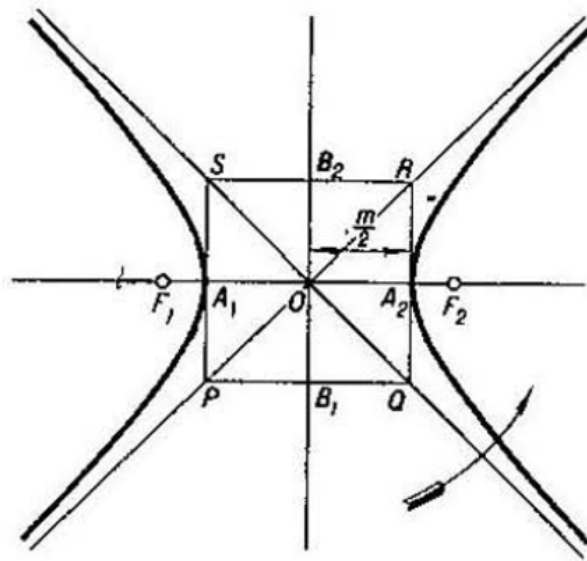


Figura 19

Resta trazar a mano dos arcos de modo que sean simétricos respecto a los ejes, que pasen por los puntos A_1 y A_2 y que se encorven suavemente aproximándose más y más a las asíntotas PR y QS .

12. En particular, el rectángulo $PQRS$ puede ser un cuadrado. Esto ocurrirá si, y solo si, las asíntotas de la hipérbola son perpendiculares. En este caso la hipérbola se denomina equilátera.

En la fig. 19 viene representado precisamente este caso. Para mayor comodidad, giremos el dibujo en 45° alrededor del punto O , en el sentido que indica la flecha; obtendremos la hipérbola representada en la fig. 20.

Tomemos en la asíntota OQ un segmento cualquiera $ON = x$ y levantemos en el punto N la perpendicular $NM = y$ hasta cortar la hipérbola. Entre y y x existe una relación muy sencilla: resulta que si aumentamos x un número de veces, y

disminuirá el mismo número de veces; recíprocamente, si disminuimos x un número de veces, y aumentará el mismo número de veces.

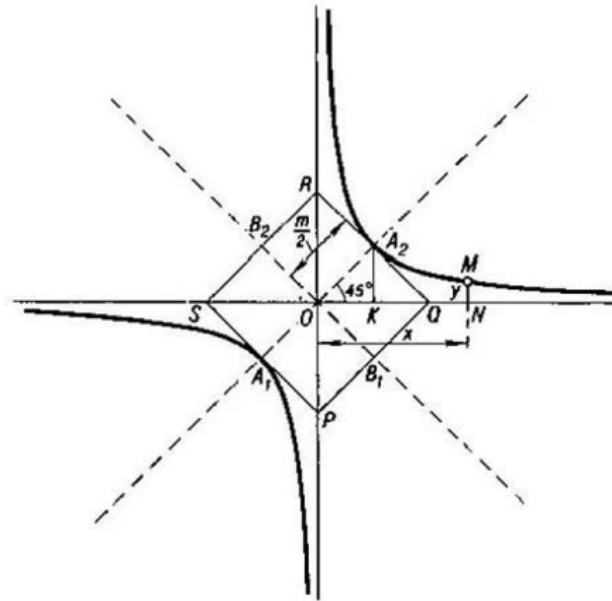


Figura 20

En otras palabras, la longitud $NM = y$ es inversamente proporcional a la longitud $ON = x$:

$$y = k / x$$

Debido a esta propiedad, la hipérbola equilátera es el gráfico de la proporcionalidad inversa. Consideremos el vértice A_2 con el fin de determinar la relación que existe entre las dimensiones de la hipérbola y el coeficiente k de la proporcionalidad inversa. Para este vértice tenemos:

x= OK

$$y = KA_2$$

los segmentos OK y KA_2 constituyen catetos del triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es

$$OA_2 = m/2$$

por eso,

$$x = y$$

$$x^2 + y^2 = (m/2)^2 = m^2/4$$

de donde

$$2x^2 = m^2/4$$

o sea,

$$x^2 = m^2/8$$

Por otro lado, de la relación de proporcionalidad inversa $y = k/x$, resulta que $xy = k$ y por eso en nuestro caso (en el que $y = x$) se tiene que $x^2 = k$. Comparando ambos resultados, $x^2 = m^2/8$ y $x^2 = k$, encontramos que $k = m^2/8$.

En otras palabras, el coeficiente k de la proporcionalidad inversa es igual a una octava parte del cuadrado de la longitud del eje real de la hipérbola.

13. Hemos señalado ya que si cortamos el cono con un cuchillo (o, hablando en términos geométricos, con un plano) sin tocar la base del cono, la sección tendrá la configuración de una elipse (véase la fig. 10). Resulta que si el plano que corta el cono pasa por su base, se puede obtener como sección un arco de parábola (fig. 21, a) o un arco de hipérbola (fig. 21, b).

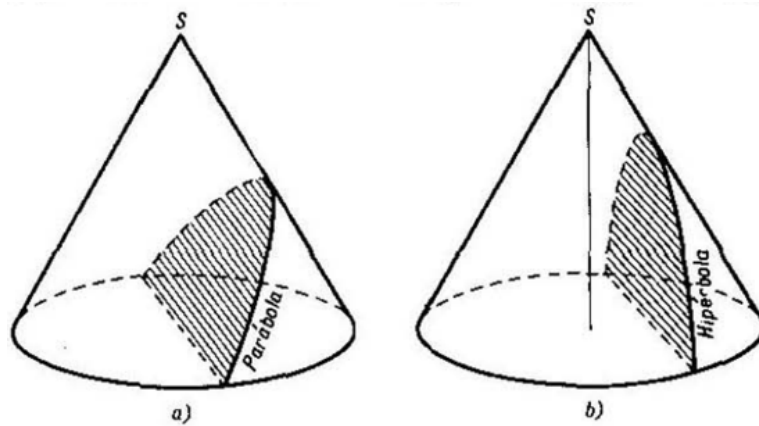


Figura 21

Por lo tanto, las tres curvas — la elipse, la hipérbola y la parábola — son secciones cónicas.

El cono que estamos cortando tiene un defecto: sólo en el caso de la elipse obtenemos la curva completa (fig. 10); en el caso de la parábola y de la hipérbola, o sea, de curvas que se prolongan indefinidamente, obtenemos sólo una porción de las mismas. Es más, la fig. 21, *b* no permite ver cómo aparece la segunda rama de la hipérbola. Para eliminar este defecto tomaremos en lugar del cono una superficie cónica que se prolonga indefinidamente. Con este fin prolongaremos indefinidamente en ambas direcciones todas las generatrices del cono, es decir, todos los segmentos rectilíneos AS , BS , CS , DS , ES , etc. que unen los puntos de la circunferencia de la base del cono con su vértice (fig. 22; naturalmente, no podemos representar en nuestra figura las generatrices indefinidamente prolongadas y, por eso, también aquí trazamos segmentos de rectas pero de longitud mayor que los segmentos iniciales).

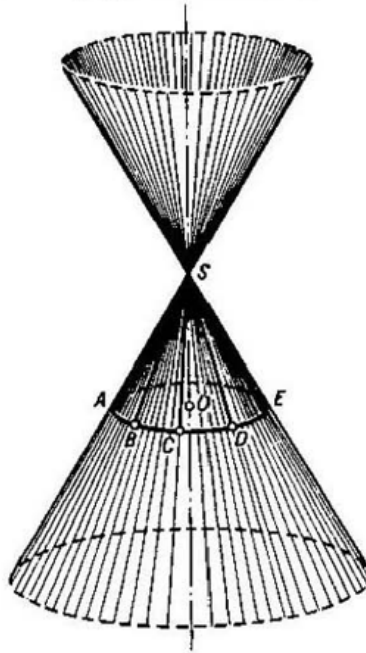


Figura 22

Así obtendremos la superficie cónica necesaria que consta de dos mitades, o como suele decirse de dos hojas, de extensión indefinida que se tocan en el punto S . Toda la superficie cónica puede ser considerada como la superficie que describe una recta móvil, a saber, una recta que pasa por el punto S y que gira de modo que permanece constante el ángulo que forma con la recta OS , eje de la superficie cónica. Esta recta móvil se denomina *generatriz* de la superficie cónica; es evidente que prolongando cada generatriz del cono tomado inicialmente, obtendremos una generatriz de la superficie cónica.

Cortemos ahora con un plano toda la superficie cónica. Si el plano corta todas las generatrices de una misma hoja de la superficie, obtendremos como sección una elipse o, como caso particular, una circunferencia (fig. 23, a); si el plano corta todas las generatrices menos una (a la que es paralelo), se obtiene como sección una parábola (fig. 23, b); por último, si el plano corta una parte de generatrices de una hoja y otra parte de generatrices de otra hoja, se obtiene como sección una hipérbola (fig. 23, c). Como vemos, para obtener la elipse o la parábola basta una hoja de la superficie cónica.

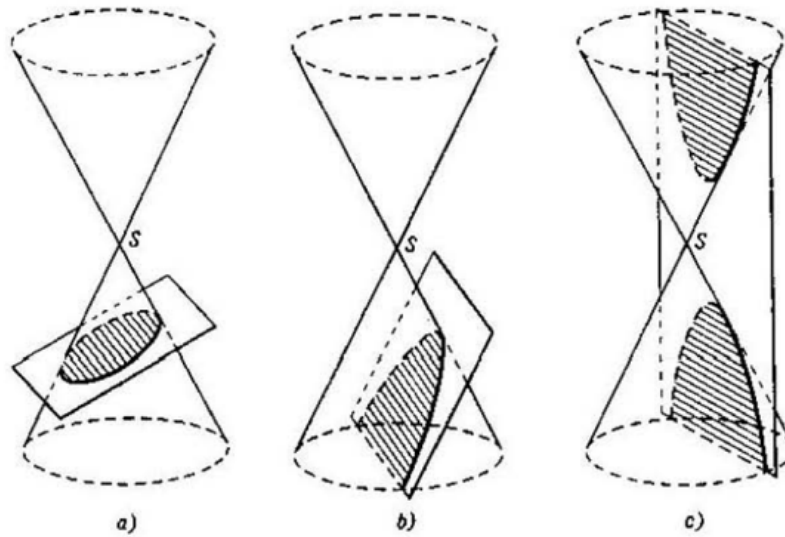


Figura 23

En cambio, para obtener la hipérbola, necesitamos toda la superficie cónica: una rama de la hipérbola pertenece a una hoja y la otra rama, a otra hoja de la superficie.

14. Consideremos la curva que describe en el plano el punto M si permanece constante el producto p de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del mismo plano. Esta curva se denomina *lemniscata* (que traducido del griego significa en forma de cinta). Si la longitud del segmento $F_1 F_2$ es c , las distancias del punto medio O del segmento $F_1 F_2$ a F_1 y F_2 serán iguales a $c/2$ y el producto de estas distancias será igual a $c^2/4$. Consideremos primero el caso en que el producto constante p es igual precisamente a $c^2/4$, o sea,

$$MF_1 * MF_2 = c^2/4$$

en este caso el punto O pertenecerá a la lemniscata y esta última tendrá la forma de un ocho «tumbado» (fig. 24).

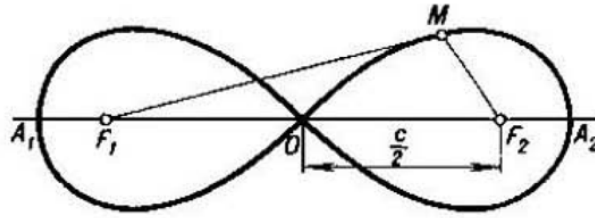


Figura 24

Si prolongamos el segmento $F_1 F_2$ en ambas direcciones hasta cortar la lemniscata, obtendremos dos puntos A_1 y A_2 . Es fácil expresar la distancia $A_1 A_2 = x$ entre los mismos a través de la distancia $F_1 F_2 = c$ que conocemos. Notemos para ello que la distancia de A_2 a F_2 es igual a $x/2 - c/2$, y que la distancia de A_2 a F_1 es igual a $x/2 + c/2$; por eso, el producto de estas distancias será

$$(x/2 + c/2) * (x/2 - c/2) = x^2/4 - c^2/4$$

Pero, según la hipótesis, este producto debe ser igual a $c^2/4$, o sea,

$$x^2/4 - c^2/4 = c^2/4$$

de donde $x^2 = 2c^2$ y $x = c\sqrt{2} \approx 1,414c$.

Existe una relación curiosa entre esta lemniscata y la hipérbola equilátera. Tracemos por el punto O diferentes rayos rectilíneos (fig. 25) y consideremos los puntos en los que éstas se cortan con la lemniscata.

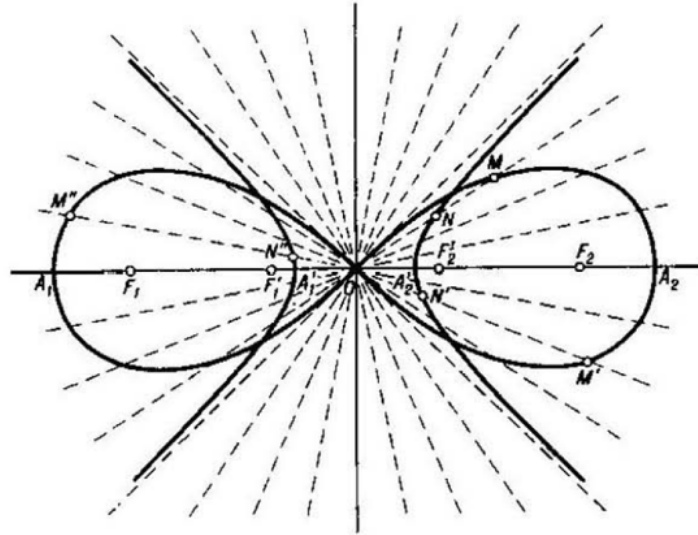


Figura 25

Resulta que mientras el ángulo entre el rayo y OF_2 (u OF_1) es menor de 45° , existirá otro punto de intersección, además de O en que el rayo corta la lemniscata; en cambio, si este ángulo es de 45° o mayor, no existirá el segundo punto de intersección. Tomemos un rayo cualquiera del primer grupo y supongamos que corta la lemniscata en el punto M (distinto de O); a partir del punto O construyamos en dicho rayo el segmento $ON = 1/OM$. Si realizamos esta construcción para todos los rayos del primer grupo, los puntos N , correspondientes a los puntos M de la lemniscata, quedarán sobre la hipérbola equilátera cuyos focos estarán en los puntos F'_1 y F'_2 tales que

$$OF'_1 = 1/ OF_1$$

$$OF'_2 = 1/ OF_2$$

15. Si la magnitud del producto constante p es distinto de $c^2/4$, la lemniscata tendrá otra forma. En el caso en el que $p < c^2/4$, la lemniscata consta de dos óvalos, uno de los cuales contiene el punto F_1 y el otro, el punto F_2 (fig. 26).

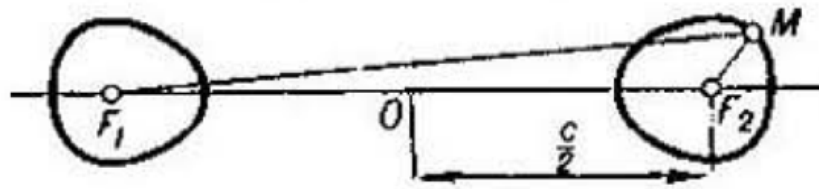


Figura 26

En el caso en el que el producto $p < c^2/4$, pero menor que $c^2/2$, la lemniscata tiene la forma de un bizcocho (fig. 27).

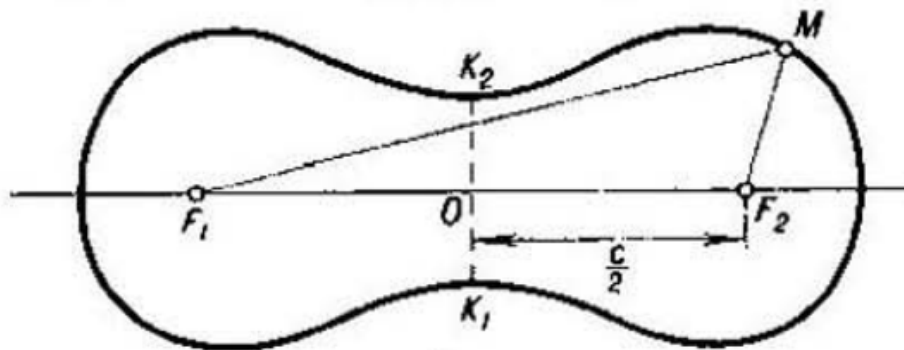


Figura 27

Si p difiere poco de $c^2/4$, «la cintura» K_1K_2 del bizcocho será muy estrecha y la curva se aproximará, por su forma, al ocho «tumbado».

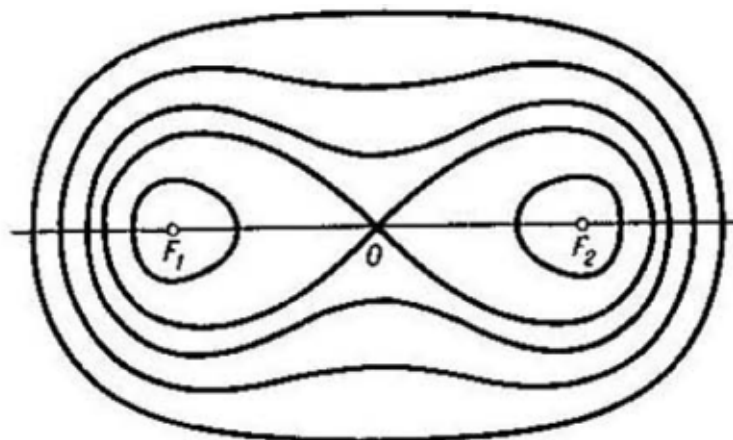


Figura 28

En cambio, si p difiere poco de $c^2/2$, el bizcocho apenas tiene cintura y para $p \geq$

$c^2/2$, la cintura desaparece totalmente y la lemniscata toma la forma de un óvalo (fig. 28; aquí se han representado distintas lemniscatas para poder compararlas).

16. Tomemos ahora un número cualquiera de puntos $F_1, F_2, \dots, F_n$, en el plano y hagamos que el punto M se mueva de modo que permanezca constante el producto de sus distancias a estos puntos. Obtendremos una curva cuya forma depende de la posición mutua de los puntos $F_1, F_2, \dots, F_n$ y de la magnitud del producto constante. Esta curva se denomina *lemniscata* de n focos.

Hemos considerado lemniscatas de dos focos. Variando el número de los focos, colocándolos de modos distintos y escogiendo una u otra magnitud para el producto constante de las distancias, podemos obtener lemniscatas de las formas más raras. A partir de un punto A comencemos a desplazar la punta del lápiz sobre el papel de modo que la punta vuelva de nuevo al punto inicial. Obtendremos así una curva; exigiremos sólo que no se corte a sí misma. Es evidente que podemos obtener así curvas que tienen, por ejemplo, la forma de una cabeza humana o de un pájaro (fig. 29).

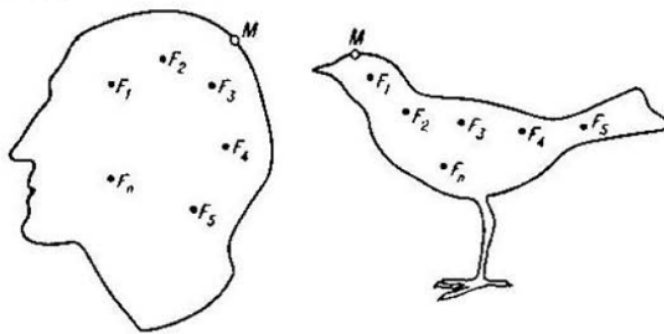


Figura 29

Resulta que siempre se puede escoger el número n , la posición de los focos

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

y la magnitud del producto constante de las distancias

$$MF_1 * MF_2 * \dots * MF_n = P$$

de modo que la lemniscata correspondiente no difiera a simple vista de esta curva por arbitraria que sea la última. En otras palabras, las posibles desviaciones entre el punto M que describe la lemniscata y la curva escogida no pasarán de la anchura de la raya del lápiz (que de antemano puede ser afilado de modo que la raya sea muy fina). Este resultado maravilloso que pone de manifiesto la gran variedad y la riqueza de formas que tienen las lemniscatas de varios focos se demuestra con rigor absoluto, pero la demostración es compleja y exige el empleo de las Matemáticas Superiores.

17. Apliquemos al borde inferior de la pizarra una regla y hagamos rodar sobre ella un aro o círculo (de madera o de cartón) apretándolo contra la regla y la pizarra. Si fijamos en el aro o círculo un pedazo de tiza (en el punto de contacto con la regla), este último describirá una curva (fig. 30) denominada *cicloide* (que traducido del griego significa circular).

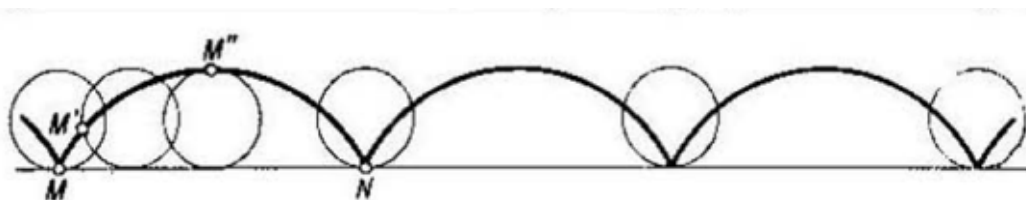


Figura 30

Un giro del aro corresponde a un arco $MM'M''N$ de la cicloide; si el aro continúa rodando, se obtendrán uno tras otro los demás arcos de la cicloide.

Para obtener en el papel la forma aproximada de un arco de la cicloide que corresponde al descrito durante el giro de un aro de, digamos, tres centímetros de diámetro, tomemos en la recta un segmento de longitud

$$3 * 3,14 = 9,42 \text{ cm}$$

igual a la longitud del aro, o sea, a la longitud de la circunferencia de tres centímetros de diámetro. Dividamos a continuación este segmento en un número de partes iguales, digamos en seis partes, y para cada punto de división

consideremos la posición que tiene el aro cuando se apoya en dicho punto (fig. 31), numerando estas posiciones con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

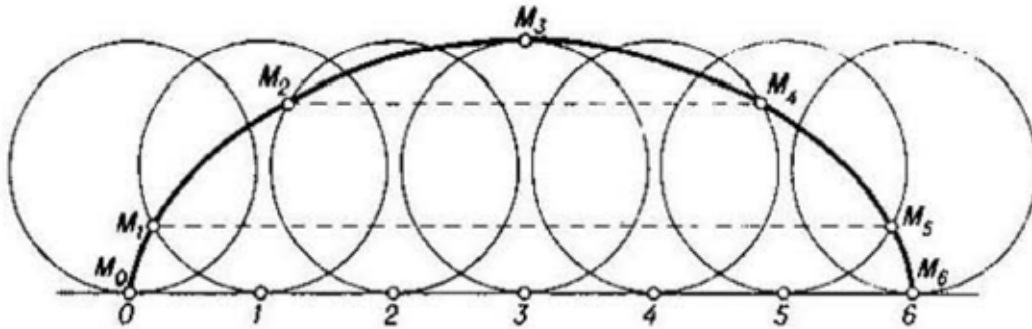


Figura 31

Para pasar de una posición a la posición siguiente, el aro debe girar una sexta parte de la revolución completa (ya que la distancia entre dos puntos de división sucesivos es igual a una sexta parte de la circunferencia). Por eso, si en la posición 0 la tiza se encontraba en el punto M_0 , en la posición 1 aparecerá en el punto M_1 correspondiente a una sexta de la circunferencia, contando desde el punto de tangencia; en la posición 2 estará en el punto M_2 a dos sextas del punto de tangencia, etc. Para obtener los puntos M_1 , M_2 , M_3 , etc., bastará tornar el radio de 1,5 y transportarlo a partir del punto de tangencia según la circunferencia correspondiente; en la posición 1 hace falta una traslación, en la posición 2 se necesitan dos traslaciones efectuadas sucesivamente, en la posición 3, tres traslaciones, etc. Para trazar la cicloide resta ahora unir los puntos M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 y M_6 mediante una curva suave.

18. Entre muchas propiedades notables que tiene la cicloide señalemos una, debido a la cual esta curva recibió el nombre sonante y extraño de «braquistócrona» que consta de dos palabras griegas, mínimo y tiempo.

Consideremos el problema siguiente: ¿qué forma debe tener un canal metálico bien pulido que une dos puntos fijos A y B , (fig. 32) para que sea mínimo el tiempo que invierte una bola metálica pulida en recorrerlo desde el punto A hasta el punto B ? A primera vista, parece que el canal debe ser rectilíneo pues sólo en este caso la bola recorrerá el camino más corto entre A y B . Pero se trata del tiempo mínimo, y no

del camino más corto, y este tiempo, aparte de la longitud del recorrido, depende también de la velocidad de la bola. Si encorvamos el canal hacia abajo, su parte correspondiente al punto A tendrá una pendiente mayor en comparación con el canal rectilíneo y la bola obtendrá aquí una velocidad mayor que en el tramo de misma longitud del canal rectilíneo.

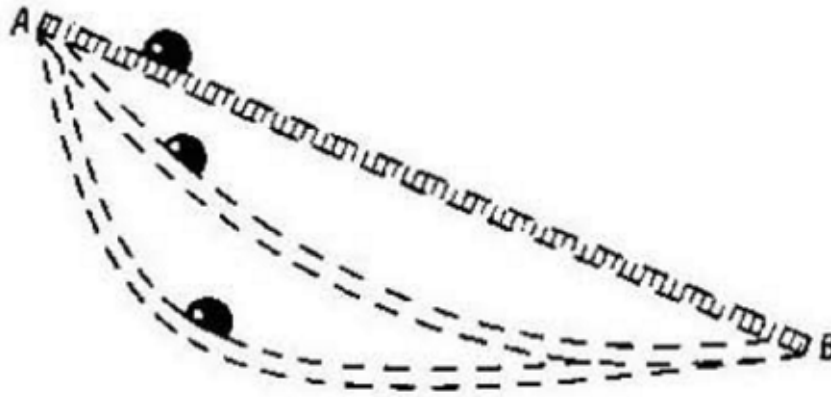
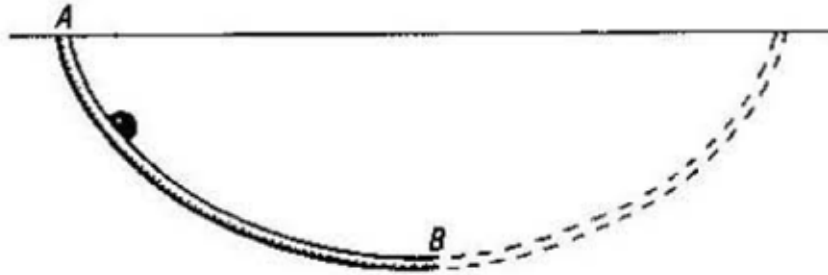


Figura 32

Por otro lado, si la parte inicial tiene gran pendiente y es relativamente larga, la otra parte, correspondiente al punto B, también será larga pero tendrá una pendiente muy suave: la bola recorrerá rápidamente el primer tramo, muy lentamente el segundo y podrá demorar en llegar al punto B. Es decir, el canal debe tener, por lo visto, una forma cóncava, pero su encorvadura no debe ser excesiva.

Galileo (1564-1642), astrónomo y físico italiano, pensaba que el canal de tiempo mínimo debe tener la forma de arco de una circunferencia. Pero los hermanos Bernoulli, matemáticos suizos, a principios del siglo XVIII demostraron mediante un cálculo exacto que esto no es cierto y que el canal debe tener la forma de un arco de cicloide (invertido hacia abajo, fig. 33).

*Figura 33*

Desde ese momento la cicloide recibió el nombre de braquistócrona mientras que las demostraciones de Bernoulli dieron origen a una nueva rama de las Matemáticas, al Cálculo Variacional, que se ocupa de buscar las curvas que ofrecen el valor mínimo (o máximo, según el caso) a una u otra magnitud que nos interesa.

19. Concluimos nuestro relato sobre las curvas maravillosas. Hemos considerado sólo algunas de ellas sin agotar ni mucho menos sus propiedades. Existen muchas otras curvas que no hemos abarcado en nuestro libro: nada hemos dicho de la catenaria (curva formada por una cadena pesada suspendida entre dos puntos), ni de la espiral de Arquímedes (curva que describe un escarabajuelo al deslizarse a lo largo de una regla que gira uniformemente), ni tampoco del desarrollo (envolvente) de la circunferencia (curva que describe al desarrollarse el extremo de un hilo arrollado en una bobina), etc. Nuestro único fin era despertar en el lector, familiarizado con los rudimentos matemáticos nada más, el interés hacia algunos resultados curiosos del inmenso tesoro del saber matemático.